

るまで足し続けるか(上の式では $i = 100$) を書きます¹¹。例えば、100個のデータのうち、5番目から10番目までのデータの合計は、

$$\sum_{i=5}^{10} x_i = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$$

と表すことができます。なお、添え字は i でなくても構いません。

$$\sum_{i=5}^{10} x_i = \sum_{j=5}^{10} x_j = \sum_{k=5}^{10} x_k = \sum_{\star=5}^{10} x_{\star}$$

上の式は全て $x_5 + x_6 + \dots + x_{10}$ を表していて、全く同じ意味の式となっています。添え字の文字自体はあまり重要ではなく、「どこからどこまで添え字が動くか」が重要なのです¹²。

慣れてしまえば非常に便利な記号なのですが、慣れるまでは扱いにくい記号かもしれません。分からない時は、「…」を使って具体的にどのような足し算になっているか確認すると(この作業を「書き下す」と言います)、理解が深まるはずですよ。

♣ もう1度 softmax 関数の式を見る

以上で、softmax 関数を理解するために必要な知識が揃いましたので、もう1度式を見てみます。

$$y_i = \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^n e^{x_k}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

まず、分母を見てみましょう。総和記号を書き下してみると、

$$\sum_{k=1}^n e^{x_k} = e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}$$

となります。ここで、 e^x は底がネイピア数 e の指数関数です¹³。つまり、分母は入力値 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を指数関数 e^x に入力した時の、出力値の合計となっていることが分かります。あとは、この分母の値を用いて、softmax 関数の n 個の出力値 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ が、

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{e^{x_1}}{\sum_{k=1}^n e^{x_k}} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}} \\ y_2 &= \frac{e^{x_2}}{\sum_{k=1}^n e^{x_k}} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{e^{x_n}}{\sum_{k=1}^n e^{x_k}} = \frac{e^{x_n}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}} \end{aligned}$$

¹¹文章中では、省スペース化のために $\sum_{i=1}^{100} x_i$ のように右下と右上に書いて表すこともあります。

¹²添え字の動く範囲を表す時に、 $\sum_{i=5}^{10}$ の場合には「添え字 i は5から10まで走る」とよく言います。

¹³特にネイピア数が底の指数関数を「自然指数関数」といいます。