といった具合で求まります。この n 本の式をまとめて表したのが、最初の式という訳です。因みに、n 個の出力値 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ を全て足してみると[14]、

$$y_1 + y_2 + \cdots y_n = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}} + \frac{e^{x_2}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}} + \cdots + \frac{e^{x_n}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}}$$

$$= \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}} = 1$$

と合計が 1 になっていることが確認できます。最初に述べたように、softmax 関数は n 個の入力値 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を合計が 1 となるように変換して出力する関数になっていることが分かります。

♣ 具体例

最後に、具体的なデータに対してこの softmax 関数を使ってみましょう[15]。例として、次の 3 つの入力データ $(n = 3)$

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{1.0,\ 2.0,\ 3.0\}$$

を考えましょう。この入力データを softmax 関数を用いて変換すると、出力値は

$$y_1 = \frac{e^{1.0}}{e^{1.0} + e^{2.0} + e^{3.0}} = 0.09003057\cdots$$

$$y_2 = \frac{e^{2.0}}{e^{1.0} + e^{2.0} + e^{3.0}} = 0.24472847\cdots$$

$$y_3 = \frac{e^{3.0}}{e^{1.0} + e^{2.0} + e^{3.0}} = 0.66524096\cdots$$

となります。3 つを足すと、$y_1 = y_2 = y_3 = 1$ になることが確認できます。この性質から、出力値をある種の確率値と解釈できるようになるのが、softmax 関数を用いる利点となります。

[14] 分母は揃っているので、単に分子を足せば良いだけです。
[15] e^1, e^2, e^3 の値は、関数電卓 (iPhone の計算機アプリでも OK) を使うとすぐに分かります。